УДК 518.5

И. В. Бойков, Г. И. Гринченков

МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ И МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН

Аннотация. Предложено два приближенных метода нахождения статических характеристик многослойных пластин, математическими моделями которых являются системы дифференциальных уравнений в частных производных. Первый из них заключается в сведении исходной системы уравнений в частных производных к новому классу гиперсингулярных интегральных уравнений. Второй заключается в сведении исходной задачи к системе, состоящей из бигармонического уравнения и уравнения Гордона – Клейна. Применение к последней системе метода граничных интегральных уравнений приводит к системе гиперсингулярных интегральных уравнений, которая решается численно.

Ключевые слова: многослойные пластины, метод граничных интегральных уравнений, гиперсингулярные интегральные уравнения.

Abstract. The authors suggest two approximate methods for discovering static characteristics of multilayer plates with systems of differential equations in partial derivatives being its' mathematical models. The first consists in reduction of the original system of equations in partial derivatives to a new class of hypersingular integral equations. The second consists in the reduction of the original problem to the system composed of a biharmonic equation and the Gordon-Klein. Application of the boundary integral equations to the latter system leads to the system of hypersingular integral equations, which is solved numerically.

Key words: multilayer plates, method of boundary integral equations, hypersingular integral equations.

Введение

Композитные материалы и, в частности, многослойные пластины находят широкое применение в современной технике, особенно в авиастроении, кораблестроении, космической технике благодаря сочетанию легкости, высокой жесткости и высокой прочности.

Математические модели, описывающие поведение многослойных пластин под нагрузкой, предложены в [1–6]. Эти модели представлены системами уравнений в частных производных. Аналитические методы решения этих систем в общем виде неизвестны, и поэтому построение численных методов является актуальной задачей. Среди этих методов наибольшей популярностью пользуется метод граничных элементов благодаря эффективной технике вычислений. Для применения метода граничных элементов требуется располагать фундаментальным решением исходной системы уравнений в частных производных.

Нахождению фундаментальных решений посвящено большое число работ. R. Ganowicz [1] ищет фундаментальное решение для трехслойной изотропной пластины методом Фурье-преобразования. E. S. Ventsel [6, 7] ищет фундаментальное решение для тонкой изотропной трехслойной пластины, сведя исходную систему уравнений в частных производных к бигармоническому уравнению и уравнению Гордона – Клейна. J. Wang and M. Huang [8], J. Wang [9] для нахождения фундаментального решения используют метод Л. Хормандера [10] и метод волновой декомпозиции на плоскости [11]. Для нахождения фундаментальных решений И. В. Бойков и др. [12] ввели новый класс гиперсингулярных интегралов и представили фундаментальное решение через эти интегралы.

В данной работе предложено несколько численных методов решения краевых задач для систем уравнений в частных производных, моделирующих механические свойства многослойных пластин и композитных материалов.

1. Определение одного класса гиперсингулярных интегралов

Определим гиперсингулярные интегралы с особенностями на произвольных контурах, ограничившись для простоты двумерным случаем. К этим интегралам сводятся задачи механики композитных материалов [12].

Рассмотрим интеграл

$$H(f,\gamma) \equiv \int\limits_{R_2}\int \frac{f(t_1,t_2)}{\gamma(t_1,t_2)} dt_1 dt_2,$$

где $\gamma(t_1,t_2)$ – гладкая функция. В большинстве случаев будем считать, что $\gamma(t_1,t_2)$ – полином r-го порядка по переменным t_1 и t_2. Пусть контур γ определяется уравнением $\gamma(t_1,t_2)=0$, а ε – произвольное малое число.

Обозначим через Γ_ε область, состоящую из точек, расстояние от которых до контура γ не превосходит ε. Расстояние между точками области Γ_ε и контуром γ будем вычислять в евклидовой метрике.

Пусть каждая точка контура γ будет нулем не выше r-го порядка функции $\gamma(t_1,t_2)$. Пусть L_ε – граница области Γ_ε.

Определение 1.1 [12]. Конечной частью интеграла

$$H(f,\gamma) = \int\limits_{R_2}\int \frac{f(t_1,t_2)}{\gamma(t_1,t_2)} dt_1 dt_2 \tag{1}$$

назовем предел

$$H(f,\gamma) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int\limits_{R_2\backslash\Gamma_\varepsilon}\int \frac{f(t_1,t_2)}{\gamma(t_1,t_2)} dt_1 dt_2 - \frac{F_{\gamma,\varepsilon}(\varepsilon)}{\varepsilon^{r-1}}\right], \tag{2}$$

где $F_{\gamma,\varepsilon}(\varepsilon)$ – функция, удовлетворяющая двум условиям:

1) в области Γ_ε функция $F_{\gamma,\varepsilon}(\varepsilon)$ имеет производные до r-го порядка;

2) предел существует.

Можно показать, что предел не зависит от вида функции $F_{\gamma,\varepsilon}(\varepsilon)$.

Отметим, что данное выше определение многомерных гиперсингулярных интегралов допускает распространение на случай, когда уравнение $\gamma(t_1,t_2)=0$ определяет контур, состоящий из пересекающихся дуг.

2. Численные методы решения систем дифференциальных уравнений в частных производных

В этом разделе предложено и обосновано несколько приближенных методов решения краевых задач для систем дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа.

Рассмотрим систему уравнений

$$AU = F, \tag{3}$$

где $A = \{A_{ij}\}$, $i, j = 1,2,\ldots,n$;

$$A_{ij} = C_{ij}^{20} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + C_{ij}^{11} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + C_{ij}^{02} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + C_{ij}^{10} \frac{\partial}{\partial x_1} + C_{ij}^{01} \frac{\partial}{\partial x_2} + C_{ij}^{00}, \; i, j = 1, 2, \ldots, n;$$

$$U = (u_1(x_1, x_2), \ldots, u_n(x_1, x_2))^T, \; F = (f_1(x_1, x_2), \ldots, f_n(x_1, x_2))^T.$$

В системе (3) $F -$ известная правая часть; $U -$ вектор-функция, подлежащая определению, C_{ij}^{kl}, $i, j = 1, 2, k, \; l = 0, 1, 2,$ – постоянные.

Для простоты обозначений мы ограничиваемся рассмотрением систем уравнений с дифференциальными операторами второго порядка и с неизвестными функциями и правыми частями, зависящими от двух пространственных переменных.

Из проводимых ниже рассуждений следует, что предлагаемые методы справедливы для дифференциальных операторов любого конечного порядка и для функций любого конечного числа переменных.

Вначале найдем частное решение уравнения (3).

Следуя [10], поставим в соответствие системе уравнений (3) систему алгебраических уравнений

$$B(x_1, x_2) Z(x_1, x_2) = G(x_1, x_2), \tag{4}$$

где $B(x_1, x_2) = \{B_{ij}(x_1, x_2)\}$, $i, j = 1,2,\ldots,n$;

$$Z(x_1, x_2) = (z_1(x_1, x_2), \ldots, z_n(x_1, x_2))^T; \; G(x_1, x_2) = (g_1(x_1, x_2), \ldots, g_n(x_1, x_2))^T;$$

$$B_{ij}((x_1, x_2)) = C_{ij}^{20} x_1^2 + C_{ij}^{11} x_1 x_2 + C_{ij}^{02} x_2^2 + C_{ij}^{10} x_1 + C_{ij}^{01} x_2 + C_{ij}^{00}, \; i, j = 1,2,\ldots,n.$$

Обозначим через $\Delta(x_1, x_2)$ определитель матрицы $B(x_1, x_2)$, а через $B^{\text{cof}}(x_1, x_2)$ – алгебраическое дополнение к матрице $B(x_1, x_2)$. Очевидно,

$$B^{\text{cof}}(x_1, x_2) B(x_1, x_2) = B(x_1, x_2) B^{\text{cof}}(x_1, x_2) = \Delta(x_1, x_2) E,$$

где $E - n \times n$ единичная матрица.

Используя аналогию между системами алгебраических уравнений и уравнений в частных производных, имеем

$$A^{\text{cof}} A = A A^{\text{cof}} = \Delta E,$$

где A^{cof} получена из матрицы $B^{\text{cof}}(x_1, x_2)$ заменой переменных x_1 и x_2 соответствующими дифференциальными операторами. Аналогичное замечание относится и к определителю Δ, который в данном случае является дифференциальным оператором.

Умножая систему уравнений (3) слева на матрицу A^{cof}, приходим к системе уравнений

$$\Delta EU = A^{\text{cof}} F. \tag{5}$$

Применим к уравнению (5) преобразование Фурье. В результате приходим к системе уравнений

$$\left(\sum_{k=0}^{2n}\sum_{l=0}^{2n}\alpha_{kl}\omega_1^k\omega_2^l\right)u_i(\omega_1,\omega_2) = f_i(\omega_1,\omega_2),\ \ i=1,2,\ldots,n, \tag{6}$$

где $-\infty < \omega_1, \omega_2 < \infty$.

Отсюда следует, что

$$u_i(\omega_1,\omega_2) = f_i(\omega_1,\omega_2)/\gamma(\omega_1,\omega_2),\ \ i=1,2,\ldots,n, \tag{7}$$

где $\gamma(\omega_1,\omega_2) = \sum_{k=0}^{2n}\sum_{l=0}^{2n}\alpha_{kl}\omega_1^k\omega_2^l$.

Применяя к системе уравнений (7) обратное преобразование Фурье, имеем

$$u_i(x_1,x_2) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i(\omega_1 x+\omega_2 x_2)}}{\gamma(\omega_1,\omega_2)}f_i(\omega_1,\omega_2)d\omega_1 d\omega_2,\ \ i=1,2,\ldots,n. \tag{8}$$

В случае, если функция $\gamma(\omega_1,\omega_2)$ обращается в нуль, то интеграл в (8) является гиперсингулярным. Этот класс гиперсингулярных интегралов введен в работе [12]. Его определение приведено в разд. 1. В аналитическом виде интегралы (8) не вычисляются. Приближенные методы вычисления интегралов (8) предложены в работах [13, 14]. Вычисляя интегралы (8) при $i=1,2,\ldots,n,$ по кубатурным формулам, представленным в [13, 14], получаем приближенные значения решения $u_i^*(x_1,x_2)$ уравнения (3) на сетке узлов $\{v_k,v_l\}$, $k,l=0,1,\ldots,N.$ В качестве сетки узлов $\{v_k,v_l\}$ можно взять равномерную сетку $v_k=-D+2Dk/N$, $k=0,1,\ldots,N,$ где D – достаточно большое положительное число. По значениям $u_i^*(v_k,v_l)$, $k,l=0,1,\ldots,N,$ $i=1,2,\ldots,n,$ строится сплайн, который является приближенным решением системы уравнений (3) в области $[-D,D]^2$.

В случае, если нужно построить более гладкое решение, дифференцируем (8) по x_1, x_2 и по кубатурным формулам [13, 14] вычисляем производные от функций $u_i(x_1,x_2)$, $i=1,2,\ldots,n,$ в узлах сетки (v_k,v_l), $k,l=0,1,\ldots,N.$ Затем по вычисленным в узлах (v_k,v_l), $(k,l)=0,1,2,\ldots,N,$ значениям функций и их производных строятся интерполяционные полиномы или сплайны.

В результате получаем частное решение системы уравнений (3).

Перейдем к решению краевых задач для систем уравнений в частных производных.

Рассмотрим приближенный метод нахождения фундаментальных функций для системы уравнений (3).

Для нахождения фундаментальной функции нужно решить уравнение, полученное из (5) заменой правой части дельта-функцией $\delta(\zeta, x)$:

$$\Delta\varphi(\zeta, x) = \delta(\zeta, x), \tag{9}$$

где $\zeta(\zeta = (\zeta_1, \zeta_2))$ – точка, определяющая источник; x – точка на плоскости; Δ – определитель матрицы A, являющийся дифференциальным оператором от $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ $2n$-го порядка; $\varphi(\zeta, x)$ – неизвестная функция; $\delta(\zeta, x)$ – дельта-функция Дирака.

Применим к уравнению (9) преобразование Фурье. В результате имеем

$$\gamma(\omega_1, \omega_2)\Phi(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{2\pi} e^{-i(\omega_1\xi_1 + \omega_2\xi_2)}$$

и, следовательно,

$$\varphi(\zeta, x) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(\omega_1(x_1-\zeta_1)+\omega_2(x_2-\zeta_2))}}{\gamma(\omega_1, \omega_2)} d\omega_1 d\omega_2. \tag{10}$$

Применяя к интегралу (10) кубатурные формулы, предложенные в [12–14], получаем приближенный метод вычисления фундаментальных решений.

Замечание. Используя формулу (10), стандартным способом представляем решение задач Дирихле и Неймана для систем вида (3).

Непосредственное применение формул (8) и (10) связано с большими вычислительными трудностями. Поэтому представляет значительный интерес выделение отдельных задач, для решения которых известны фундаментальные функции.

Одна из таких задач возникает в теории многослойных пластин. Следующий раздел посвящен решению этой задачи.

3. Численное моделирование многослойных пластин произвольной формы

Введем декартову систему координат с осью OZ, направленной вверх. Рассмотрим изотропную упругую трехслойную пластину Ω (одно- или многосвязную), у которой внешние слои имеют толщину h_0, а внутренний слой – $h_1, h_0 << h_1$. Пластина Ω расположена в плоскости OXY, ограничена контуром Γ и имеет поперечную нагрузку $p(x, y)$, $(x, y) \in \Omega$.

Обозначим через $w(u, v)$ прогиб пластины в точке (u, v). Через $Q_x^{(u,v)}$ обозначим тангенс угла между прямыми, образованными в результате пересечения плоскости OXY и плоскости касательной к пластине в точке

$(u, v, w(u, v))$ с плоскостью параллельной координатной плоскости OXZ и проходящей через точку $(u, v, w(u, v))$. Аналогично определяется и $Q_y^{(u,v)}$.

Деформация пластины при небольших отклонениях описывается системой дифференциальных уравнений [6, 7]

$$L_{i1}(Q_x) + L_{i2}(Q_y) + L_{i3}(w) = 0,\ i = 1,2; \tag{11}$$

$$L_{31}(Q_x) + L_{32}(Q_y) + L_{33}(w) + p = 0, \tag{12}$$

в которой дифференциальные операторы L_{ij}, $i, j = 1,2,3,$ определены формулами

$$L_{11}(..) = \frac{D_s}{D_Q}\frac{\partial^2(..)}{\partial x^2} + \frac{1}{\mu^2}\frac{\partial^2(..)}{\partial y^2} - (..),\ L_{12}(..) = \frac{1}{\mu^2}\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{\partial^2(..)}{\partial x \partial y},\ L_{13}(..) = -\frac{\partial(..)}{\partial y},$$

$$L_{12}(..) = L_{21}(..), L_{22} = \frac{D_s}{D_Q}\frac{\partial^2(..)}{\partial y^2} + \frac{1}{\mu^2}\frac{\partial^2(..)}{\partial x^2} - (..), L_{23}(..) = -\frac{\partial(..)}{\partial y},$$

$$L_{31}(..) = D_Q L_{13}(..), L_{32}(..) = D_Q L_{23}(..),\ L_{33}(..) = D_Q \Delta(..). \tag{13}$$

Здесь $\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ – оператор Лапласа; D_s и D_Q – коэффициенты, характеризующие изгибы и сжатие пластины соответственно:

$$D_s = E_j h_0 h^2 / (2(1-\nu^2)),\ h = h_1 + h_0,\ \mu^2 = 2D_Q / D_s(1-\nu),\ D_Q = h^2 G_{h_1},$$

ν – коэффициент Пуассона; E_f – модуль упругости внешних пластин; G_{h_1} – модуль сдвига внутренней пластины.

E. S. Ventsel [6, 7] предложил метод решения краевых задач для систем уравнений (11), (12), который сводится к бигармоническому уравнению и уравнению Гордона – Клейна.

Опишем способ преобразования уравнений вида (11), (12), который приводит к бигармоническому уравнению и уравнению Гордона – Клейна. Отметим, что этот способ применим и к уравнениям вида (3).

Представим систему уравнений (11), (12) в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ w_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -p \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Системе уравнений (13) поставим в соответствие систему алгебраических уравнений:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -p \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Решение системы (15) имеет вид

$$x_1 = -\frac{p}{\Delta}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{23}), x_2 = \frac{p}{\Delta}(a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13}), x_3 = -\frac{p}{\Delta}(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12});$$

$\Delta -$ в данном случае определитель матрицы (15).

Запишем решение системы уравнений (14) по аналогии с решением системы уравнений (15). Выражение p/Δ не имеет аналога в случае, когда рассматриваются дифференциальные уравнения. Поэтому при рассмотрении системы уравнений (14) в качестве аналога p/Δ введем неизвестную функцию F. В результате решение системы уравнений (14) представляем в виде

$$Q_x = (L_{12}L_{23} - L_{22}L_{13})F,$$
$$Q_y = -(L_{11}L_{23} - L_{21}L_{13})F,$$
$$w = (L_{11}L_{22} - L_{21}L_{12})F.$$

Проведя элементарные преобразования, имеем $Q_x = -\frac{\partial}{\partial x}L(F),$ $Q_y = -\frac{\partial}{\partial y}L(F),$ $w = L(F) - \frac{D_s}{D_Q}\Delta L(F),$ где $L(F) = F - \mu^{-2}\Delta F.$

Подставляя эти выражения в систему (11), (12), убеждаемся, что они удовлетворяют уравнениям (11), а уравнение (12) принимает вид

$$D_s \Delta\Delta L(F) = p.$$

Введя обозначение $\Phi = L(F),$ сводим систему (11), (12) к бигармоническому уравнению

$$D_s \Delta\Delta\Phi = p. \qquad (16)$$

Приближенному решению бигармонических уравнений посвящена обширная литература [15, 16]. Ниже для решения уравнения (16) используется метод граничных интегральных уравнений, который сводит решение уравнения (16) к численному решению гиперсингулярных интегральных уравнений. Преимущество этого метода заключается в том, что он может быть реализован в случае достаточно сложной границы Γ пластины Ω.

Решив уравнение (16), получаем частное решение неоднородного уравнения.

Для того чтобы удовлетворить граничным условиям, вводим граничный потенциал Ψ формулами

$$Q_x = \partial\Psi / \partial y, Q_y = -\partial\Psi / \partial x, w = 0. \qquad (17)$$

Подставляя эти значения в (11), (12), приходим к системе

$$\frac{\partial}{\partial y}L(\Psi) = 0, \frac{\partial}{\partial x}L(\Psi) = 0, p = 0. \qquad (18)$$

Из формул (17) и (18) следует, что (17) является решением однородной системы уравнений (11), (12).

Из выражения (18) следует, что $L(\Psi) = \Psi_0 = \text{const}$. Полагая $\Psi_0 = 0$, приходим к уравнению

$$\Delta\Psi - \mu^2\Psi = 0. \tag{19}$$

Таким образом, система уравнений (11), (12) сведена [7] к системе, состоящей из бигармонического уравнения (16) и уравнения Гордона – Клейна (19).

Известно [6, 7], что механические параметры пластины выражаются через функции Φ и Ψ:

$$M_x = -D_s\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + (1-\nu)\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y}\right),$$

$$M_y = -D_s\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + (1-\nu)\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y}\right),$$

$$M_{xy} = -D_s(1-\nu)\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}\right)\right),$$

$$Q_x = -D_s\frac{\partial}{\partial x}\Delta\Phi + D_Q\frac{\partial\Psi}{\partial y},\ \ Q_y = -D_s\frac{\partial}{\partial y}\Delta\Phi + D_Q\frac{\partial\Psi}{\partial x},$$

где M_x, M_y – изгибающие моменты; M_{xy} – крутящийся момент; Q_x, Q_y – силы сдвига.

Для решения граничных задач необходимо определить граничные условия системы (11), (12), выраженные через функции Φ и Ψ. В работе [7] введены следующие граничные условия:

1. Граница Γ закреплена:

$$\Phi - \frac{D_s}{D_Q}\Delta\Phi = 0,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = \frac{\partial\Psi}{\partial s};\ \ \frac{\partial\Phi}{\partial s} = -\frac{\partial\Psi}{\partial n}.$$

Первое уравнение имеет следующий физический смысл: $w|_\Gamma = 0$. Условия $\frac{\partial\Phi}{\partial n} = \frac{\partial\Psi}{\partial s}$; $\frac{\partial\Phi}{\partial s} = -\frac{\partial\Psi}{\partial n}$ означают согласование функций Φ и Ψ на границе области.

2. Жесткое закрепление:

$$\Phi = 0,\ \ \frac{\partial\Psi}{\partial n} = 0,\ \ \Delta\Phi = 0.$$

Первое и третье уравнения имеют следующий физический смысл:

$$w|_\Gamma = \Phi - \frac{D_s}{D_Q}\Delta\Phi = 0.$$

3. Мягкое закрепление:

$$\Phi-\frac{D_s}{D_Q}\Delta\Phi=0,\quad (1-\nu)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}-\frac{\partial\Psi}{\partial s}\right)+\nu\Delta\Phi=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial s}+\frac{\partial\Psi}{\partial n}\right)-\frac{1}{2}\Delta\Psi=0.$$

Из первого уравнения следует, что пластина закреплена на границе:

$$w|_\Gamma=(\Phi-\frac{D_s}{D_Q}\Delta\Phi)|_\Gamma=0.$$

4. Свободная граница:

$$(1-\nu)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}-\frac{\partial\Psi}{\partial s}\right)+\nu\Delta\Phi=0,\ \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial s}+\frac{\partial\Psi}{\partial n}\right)-\frac{1}{2}\Delta\Psi=0,$$

$$-D_s\frac{\partial}{\partial n}\Delta\Phi+D_Q\frac{\partial\Psi}{\partial s}=0.$$

Эти уравнения имеют следующий физический смысл. Пластина не закреплена, а свободно опирается своей границей на твердое основание.

Здесь $\partial/\partial n$ и $\partial/\partial s$ означают дифференцирование в направлении внешней нормали и дифференцирование по параметру s, являющемуся длиной контура; $\Delta-$ оператор Лапласа. Обход границы пластины проводится против часовой стрелки.

Для решения граничных задач будем применять метод граничных интегральных уравнений.

Фундаментальные решения бигармонических уравнений и уравнений Гордона – Клейна определяются следующими выражениями:

$$G_\Phi(x,y;\xi,\eta)=\frac{1}{8\pi D_s}r^2\ln r,\ G_\Psi(x,y;\xi,\eta)=\frac{1}{2\pi}K_0(\mu r),$$

где $r=\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\right]^{1/2}$; $K_0(\mu r)$ – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка.

Функция Бесселя представима интегралом

$$K_0(\mu r)=\int_1^\infty\frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2-1}e^{\mu r\tau}},$$

здесь $(x,y)\in\Omega$ – точка наблюдения; (ξ,η) – координаты источника.

Потенциалы $\Phi(x,y)$ и $\Psi(x,y)$ выражаются [7] (со ссылкой на [17, 18]) интегральными представлениями

$$\Phi(x,y)=\int_\Gamma\left[G_\Phi(x,y;\xi,\eta)q_n(\xi,\eta)+\frac{\partial G_\Phi(x,y;\xi,\eta)}{\partial n}m_n(\xi,\eta)\right]ds+\iint_\Omega G_\Phi p\,d\Omega;\quad(20)$$

$$\Psi(x,y)=\int\limits_{\Gamma} G_{\Psi}(x,y;\xi,\eta)\theta_n(\xi,\eta)ds, \tag{21}$$

где $(x,y)\in\Omega$; $(\xi,\eta)\in\Gamma$.

Подставляя потенциалы $\Phi(x,y)$ и $\Psi(x,y)$ в граничные условия, получаем системы уравнений для нахождения функций $q_n(\xi,\eta)$, $\mathrm{m_n}(\xi,\eta)$, $\theta_{\mathrm{n}}(\xi,\eta)$.

Рассмотрим на примере жесткого закрепления вычислительную схему, к которой приводит эта подстановка. Выше было показано, что система уравнений (11), (12) сводится к уравнениям (16), (19). Граничные условия жесткого закрепления на границе области имеют вид

$$\Phi=0, \frac{\partial\Psi}{\partial n}=0, \Delta\Phi=0. \tag{22}$$

Подставляя потенциалы (20), (21) в уравнение (22), приходим к следующей системе гиперсингулярных интегральных уравнений:

$$\int\limits_{\Gamma}\left[G_{\Phi}(x,y;\zeta,\eta)q_n(\zeta,\eta)+\frac{\partial G_{\Phi}(x,y;\zeta,\eta)}{\partial n}m_n(\zeta,\eta)\right]ds+$$

$$+\iint\limits_{\Omega} G_{\Phi}p\,d\Omega=0, (x,y)\in\Gamma,$$

$$\int\limits_{\Gamma}\Delta\left[G_{\Phi}(x,y;\zeta,\eta)q_n(\zeta,\eta)+\frac{\partial G_{\Phi}(x,y;\zeta,\eta)}{\partial n}m_n(\zeta,\eta)\right]ds+$$

$$+\iint\limits_{\Omega}\Delta(G_{\Phi}p)d\Omega=0, (x,y)\in\Gamma,$$

$$\int\limits_{\Gamma}\frac{\partial}{\partial n}G_{\Psi}(x,y;\zeta,\eta)\theta_n(\zeta,\eta)ds=0, (x,y)\in\Gamma. \tag{23}$$

Построим приближенные методы решения системы уравнений (23). Прежде всего отметим, что первые два уравнения системы не зависят от третьего уравнения. Кроме того, третье уравнение системы (23) имеет только тривиальное решение. Это следует из следующих теорем о разрешимости задач Дирихле и Неймана для уравнения Гельмгольца:

$$\Delta u+k^2u=0,\ \ \mathrm{Im}\,k\ge 0.$$

Теорема 1 [19]. Если $\mathrm{Im}\,k>0$, то внутренние задачи Дирихле и Неймана имеют не более одного решения.

В самом деле, из этой теоремы следует, что уравнение Гельмгольца $\Delta\Psi-\mu^2\Psi=0$, $\frac{\partial\Psi}{\partial n}|_{\Gamma}=0$ имеет только тривиальное решение, так как из постановки исходной задачи следует, что $\mu^2>0$ и, следовательно, уравнение $\Delta\Psi-\mu^2\Psi=0$ можно представить в виде $\Delta\Psi+k^2\Psi=0$, где $k=i\lambda$.

Замечание. В ряде случаев для представления потенциала Ψ более удобно использовать следующее представление:

$$\Psi(x,y)=\int_{\Gamma}\left(G_{\Psi}(x,y;\xi,\eta)Q_n(\xi,\eta)+\frac{\partial G_{\Psi}(x,y;\xi,\eta)}{\partial n}\beta_n(\xi,\eta)\right)ds, \qquad (24)$$

где $(x,y)\in\Omega$, $(\xi,\eta)\in\Gamma$.

Основанием для такого представления служит

Теорема 2 [19]. Пусть $u\in R(\Omega)$ – решение уравнения Гельмгольца $\Delta u+k^2u=0$ в Ω. Тогда

$$\iint_{\Gamma}\left\{u(\xi,\eta)\frac{\partial G_{\Psi}(x,y;\xi,\eta)}{\partial n}-G_{\Psi}(x,y;\xi,\eta)\frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial n}\right\}ds(\xi,\eta=$$

$$=\begin{cases}-u(x,y), x\in\Omega,\\ 0, x\in R^2\setminus\bar{\Omega}.\end{cases}$$

Представление (24) оказывается более полезным, нежели представление, введенное третьим уравнением системы (23) в случае, когда функция $\Psi(x,y)$ входит в несколько граничных условий (см., например, граничные условия 1, 3, 4).

Приближенное решение системы уравнений

$$\int_{\Gamma}\left[G_{\Phi}(x,y;\zeta,\eta)q_n(\zeta,\eta)+\frac{\partial G_{\Phi}(x,y;\zeta,\eta)}{\partial n}m_n(\zeta,\eta)\right]ds+\iint_{\Omega}G_{\Phi}pd\Omega=0, (x,y)\in\Gamma,$$

$$\int_{\Gamma}\Delta\left[G_{\Phi}(x,y;\zeta,\eta)q_n(\zeta,\eta)+\frac{\partial G_{\Phi}(x,y;\zeta,\eta)}{\partial n}m_n(\zeta,\eta)\right]ds+$$

$$+\iint_{\Omega}\Delta(G_{\Phi}p)d\Omega=0, (x,y)\in\Gamma \qquad (25)$$

будем искать методом коллокации.

Пусть

$$q_n(\xi,\eta)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n}\alpha_{kl}\xi^k\eta^l,\ m_n(\xi,\eta)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n}\beta_{kl}\xi^k\eta^l.$$

Введем на контуре Γ $2(n+1)^2=N$ узлов таких, что $H/h\le 2$, где $H(h)$ – наибольшее (наименьшее) расстояние между соседними узлами. Обозначим узлы через v_k, $k=1,2,\ldots,N$, причем $v_N\neq v_1$.

Приравняем левые и правые части уравнений в системе (25) в узлах v_k, $k=1,2,\ldots,N$. В результате получаем систему N уравнений с N неизвестными.

Наряду с методом коллокации для приближенного решения системы уравнений (25) может быть использован (по аналогии с [20]) сплайн-коллокационный метод со сплайнами нулевого порядка.

Нетрудно видеть, что интегралы

$$\int_{\Gamma} G_{\Phi}(x,y;\xi,\eta) q_n(\xi,\eta) ds,$$

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial G_{\Phi}(x,y;\xi,\eta)}{\partial n} m_n(\xi,\eta) ds$$

не имеют особенностей; интеграл

$$\Delta\left(\int_{\Gamma} G_{\Phi}(x,y;\xi,\eta) q_n(\xi,\eta) ds \right)$$

имеет логарифмическую особенность; интеграл

$$\Delta\left(\int_{\Gamma} \frac{\partial G_{\Phi}(x,y;\xi,\eta)}{\partial n} m_n(\xi,\eta) ds \right)$$

является гиперсингулярным.

Существование гиперсингулярного интеграла позволяет построить итерационную процедуру для решения приближенной системы уравнений.

Представим вычислительную схему метода коллокации в виде блочной системы:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_n \\ M_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix},$$

где A_{ij}, $i,j=1,2$, матрицы $(n+1)\times(n+1)$; обозначения $(Q_n, M_n)^T$, $(F_1, F_2)^T$ очевидны.

Построим итерационный процесс:

$$M_n^{s+1} = A_{22}^{-1}(F_2 - A_{21}Q_n^s), \; Q_n^{s+2} = A_{11}^{-1}(F_1 - A_{12}M_n^{s+1}), \; s = 0,1,\ldots$$

Отметим, что реализация этой итерационной схемы не обязательно должна быть в виде непосредственного решения матричных уравнений.

Достоинством такой вычислительной схемы являются два обстоятельства:

1) вместо решения системы из $2(N+1)^2$ уравнений решается две системы из $(N+1)^2$ уравнений;

2) так как интеграл $\Delta\left(\int_{\Gamma} \frac{\partial G_{\Phi}(x,y;\xi,\eta)}{\partial n} m_n(\xi,\eta) ds \right)$ является гиперсингулярным, то можно доказать (см. [20–22]), что матрица A_{22}^{-1} существует и ограничена.

Замечание 1. Аналогичным образом строятся вычислительные схемы для остальных видов граничных условий.

Замечание 2. Вычислительные схемы реализованы в среде.

Список литературы

1. **Ganowicz, R.** Singular solutions in the general theory of three-layer plates / R. Ganowicz // Mech. Teoret. Stos. – 1967. – V. 3, № 5. – P. 293–307.
2. **Allen, H. G.** Analysis and Design of Structural Sandwich Panels / H. G. Allen // London, Pergamon Press, 1969. – 283 c.
3. **Лукасевич, С.** Локальные нагрузки в пластинах и оболочках / С. Лукасевич. – М. : Мир, 1982. – 544 с.
4. **Raddy, J. N.** Mechanics of laminated composite plates: theory and analysis / J. N. Raddy. – Boca Raton. FL: CRC Press, 1997.
5. **Vilson, J. R.** The Behavior of Sandwich Structures of Isotropic and Composite Materials / J. R. Vilson // Technomic Publishing Company. Inc., Lankaster, Basel, 1999.
6. **Ventsel, E. S.** Thin Plates and Shells / E. S. Ventsel, T. Krauthammer. – N. Y., Marsel Dekker, 2001. – 666 p.
7. **Ventsel, E. S.** A boundary element method applied to sandwich plates of arbitrary plan form / E. S. Ventsel // Eng. Anal. Bound. Elem., 2003. – V. 27. – P. 597–601.
8. **Wang, J.** Boundary element method for orthotropic thick plates / J. Wang, M. Huang // Acta Mech. – 1991. – V. 7. – P. 258–266.
9. **Wang, J.** The fundamental solution of orthotropic shallw shells / J. Wang // Acta Mech. – 1992. – V. 94. – P. 113–121.
10. **Hormander, L.** Linear partial differential operators / L. Hormander. – Berlin : Springer, 1976. – 284 c.
11. **Гельфанд И. М.** Обобщенные функции и действия над ними / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. – М. : ГИФМЛ, 1956. – Вып. 1. – 439 с.
12. **Boykov, I. V.** Fundamental Solutions for Thick Sandwich Plate / I. V. Boykov, A. I. Boykova, E. S. Ventsel // Engineering Analisis and Boundary Elements. – 2004. – V. 28. – P. 1437–1444.
13. **Boykov, I. V.** An approximation methods for evaluating hypersingular integrals / I. V. Boykov, A. I. Boykova, E. S. Ventsel // Engineering analysis with Boundary elements. – 2006. – V. 30. – P. 799–807.
14. **Бойков, И. В.** Приближенные методы вычисления нового класса гиперсингулярных интегралов и их приложения / И. В. Бойков, М. А. Семов // Математическое и компьютерное моделирование естественнонаучных и социальных проблем : сб. ст. VI Междунар. науч.-технич. Конф. (21–25 мая 2012 г.). – Пенза : Приволжский дом знаний, 2012. – С. 4–12.
15. **Канторович, Л. В.** Приближенные методы высшего анализа / Л. В. Канторович, В. И. Крылов. – М. ; Л. : Физматлит, 1962. – 708 с.
16. **Михлин, С. Г.** Численная реализация вариационных методов / С. Г. Михлин. – М. : Наука, 1970. – 432 с.
17. **Brebbia, C. A.** Boundary Elements. An Introduction Course / C. A. Brebbia, J. Domingguez. – WITpress. Southampton. UK, 1998. – 314 p.
18. **Бенерджи, П.** Методы граничных элементов в прикладных науках / П. Бенерджи, Р. Баттерфилд. – М. : Мир, 1984. – 494 с.
19. **Колтон, Д.** Методы интегральных уравнений в теории рассеяния / Д. Колтон, Р. Кресс. – М. : Мир, 1987. – 311 с.
20. **Boykov, I. V.** An approximate solution of hypersingular integral equations / I. V. Boykov, E. S. Ventsel, A. I. Boykova // Applied Numerical Mathematics 60. – 2010. – V. 6. – P. 607–628.
21. **Бойков, И. В.** Приближенное решение гиперсингулярных интегродифференциальных уравнений / И. В. Бойков, Ю. Ф. Захарова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2010. – № 1. – С. 80–90.

22. **Бойков, И. В.** Приближенные методы решения сингулярных и гиперсингулярных интегродифференциальных уравнений / И. В. Бойков, Ю. Ф. Захарова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2012. – № 3 (23). – С. 99–113.

Бойков Илья Владимирович
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей и прикладной математики, Пензенский государственный университет

Boykov Ilya Vladimirovich
Doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of sub-department of higher and applied mathematics, Penza State University

E-mail: math@pnzgu.ru

Гринченков Григорий Игоревич
аспирант, Пензенский государственный университет

Grinchenkov Grigory Igorevich
Postgraduate student, Penza State University

E-mail: math@pnzgu.ru

УДК 518.5

Бойков, И. В.

Метод граничных интегральных уравнений в задачах механики композитных материалов и многослойных пластин / И. В. Бойков, Г. И. Гринченков // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2012. – № 4 (24). – С. 101–114.